Lycées :F. Bourguiba - Khéfacha Monastir **Devoir de Synthèse N°1** prof : Karim - Mourad

Le : 03/12/2019 Bac Math 1 Durée : 3 H

**Exercice 1(5points)**

$I)$ Résoudre dans $C $l’équation $\left(E\right): - z^{2}+iz+1=0 $ et donner les solutions sous forme exponentielle

$II)$ Soit R=$(O,\vec{U},\vec{V} )$ un RON direct du plan .Dans l’annexe ci jointe on donne $M\left(z\right) ;A\left(1\right) et B(b)$ trois points du cercle $∁\_{(O ,1)}$ tels que $\hat{\left(\vec{U}, \vec{OM}\right)}≡θ\left[2π\right]$ et $\hat{\left(\vec{OM}, \vec{OB}\right)}≡\frac{π}{2}\left[2π\right] avec θ\in \left]0 , \frac{π}{2}\right[$

 1) Donner la forme exponentielle de z puis montrer que $b=iz$

 2) Soient les points $C( - z^{2}) $et $A^{'}= S\_{\left(OM\right)}\left(A\right) . $Montrer que $\hat{\left(\vec{U}, \vec{OA'}\right)}≡2θ\left[2π\right]$ puis déduire que $O=C\*A'$

 3) On note $H\left(1+iz-z^{2}\right) et N(1+iz)$ . a) Montrer que $OANB$ est un parallélogramme

 b) Montrer que $\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{cos⁡(θ)}{1+sin(θ)} i$

 c) Montrer que $\frac{aff(\vec{AH})}{aff(\vec{CB})} = \frac{aff(\vec{CH})}{aff(\vec{BA})} = \frac{1+iz}{1-iz}$

 d) En déduire que $H$ est l’orthocentre du triangle $ABC$ puis construit le point $H$ sur l’annexe

4) a) Déterminer $θ\in \left]0 , \frac{π}{2}\right[$ pour que le point $O$ soit l’orthocentre du triangle $ABC$

 b) En déduire que pour la valeur de $θ$ trouvée $A ; B et C$ sont les points images des racines cubiques de l’unité

## Exercice 2(5points)

Soit la fonction $ f $ définie sur $\left]-1 , 1 \right[$ par $f\left(x\right)=1+ \frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}$ et $∁\_{f}$ sa courbe dans un RON ($O , \vec{i} ,\vec{j})$

 1) a) Montrer que$ f '\left(x\right)=\frac{1}{(\sqrt{1-x^{2}})^{3} }$ pour tout x de $\left]-1 , 1 \right[$ . Dresser le tableau de variation de $f$

 b) Montrer que le point $A( 0 , 1)$ est un centre de symétrie de $∁\_{f}$

 c) Ecrire une équation de la tangente $T$ à $∁\_{f}$ au point $A$ puis etudier la position de $T$ et $∁\_{f}$

 d) Tracer$ T$ et $∁\_{f}$ dans le repère ($O , \vec{i} ,\vec{j})$

 2) a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\left]-1 ,1\right[$ sur $R$

 b) Tracer $∁\_{f^{-1}}$ dans le même repère

 c) Montrer que $f^{-1}\left(x\right)=\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^{2} +1}}$ $∀x\in $ $R$

 3) Soit $g\left(x\right)=\sqrt{(x-1)^{2}+1} ∀x\in R$ .

 On considère la suite $\left(U\_{n}\right) $ définie par$ :∀n\in N^{\*} ; U\_{n}=n^{2}\left[g\left( \frac{1}{n} \right)-g( \frac{1}{n+1} )\right] $

 a) Montrer que : $∀n\in N^{\*}$ et pour tout $x\in \left[ \frac{1}{n+1} , \frac{1}{n}\right] ; f^{-1}( \frac{1}{ n+1 } )\leq g^{'}\left(x\right)\leq f^{-1}( \frac{1}{n} )$

 b) Montrer que : $∀n\in N^{\*} ona : \frac{n}{n+1}f^{-1}\left( \frac{1}{n+1 } \right)\leq U\_{n}\leq \frac{n}{n+1}f^{-1}( \frac{1}{n} ) $

 c) En déduire la limite de la suite $( U\_{n})$

**Exercice 3(5points)**

ABO est un triangle rectangle en O tel que $ (\hat{\vec{ OA},\vec{OB }})≡\frac{π}{2}\left[2π\right]$ ; $OB=2 0A$ et $I=O\*B $

1) a) Montrer qu’ il existe un unique déplacement $f$ tel que $f\left(O\right)=I et f\left(A\right)=B$

 b) Montrer que $f$ est une rotation d’angle $\frac{π}{2}$

2) La droite perpendiculaire à (OB) et passant par $I $et la droite perpendiculaire à (AB) passant par B se coupent en C

 a) Déterminer l’image de la droite $\left(OB\right) $par $f$ puis déduire que $f\left(B\right)=C$

 b) En déduire que le centre $Ω$ de $f$ est le milieu du segment $\left[AC\right]$

3) On pose $R=r\_{(O , \frac{Π}{ 2} )}$ et $Δ= méd\_{\left[AI\right]}$ . Caractériser $fοR^{-1} et S\_{(OI)}ο R$

4) Soit $D=I\*C $ .Montrer qu’il existe un unique antidéplacement $g$ tel que $g\left(O\right)=I$ et $ g\left(A\right)=D$

 a) Montrer que $g$ est une symétrie glissante

 b) Soit $J=I\*O $ . Montrer que $gοS\_{(OA)}=S\_{J}$ puis déduire la forme réduite $g$

5) Soit $φ=g^{-1} ο f$ . Déterminer $φ(O)$ e$t φ( I )$ puis caractériser $φ$

**Exercice 4(5points)**

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[0, \frac{π}{2}\right[$ par $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{cos⁡(x)}}$

1) a) Montrer que $∀x\in \left[0, \frac{π}{2}\right[$ $f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{2}(f\left(x\right))^{3}sin⁡(x)$

 b) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\left[0, \frac{π}{2}\right[$ sur $\left[1 , +\infty \right[$

 c) Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ à droite en 1

 c) Montrer que $f^{-1}$est dérivable en $\sqrt{2}$ et donner $( f^{-1})'(\sqrt{2})$

 2) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur$\left]1 ,+\infty \right[$ et déduire que $ ∀ x\in \left]1 ,+\infty \right[$ $(f^{-1})' (x)=\frac{2}{x\sqrt{x^{4}-1}}$

 3) Soit $g$ la fonction définie sur$ \left[0, +\infty \right[ par : g\left(x\right)=f^{-1}\left( \sqrt{1+\frac{1}{x} } \right)si x\in \left]0 , +\infty \right[ et g\left(0\right)=\frac{π}{2}$

 a) Montre que $g $ est continue sur $\left[0, +\infty \right[$

 b) Montrer que $g$ est dérivable sur $\left]0 , +\infty \right[$ et que pour tout$ x\in \left]0 , +\infty \right[$ $g' (x)=\frac{-1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

 4) a) Soit $ x \in \left]0 ,+\infty \right[$ . Montrer que pour tout $t\in \left]0 ,x\right[ , -1\leq g'\left(t\right)\leq g'(x)$

 b) En déduire que $∀x\in \left]0 ,+\infty \right[ : -x\leq g\left(x\right)-g(0)\leq \frac{-x}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

 c) Montrer alors que $g$ est dérivable à droite en $0$

5) Donner une équation de la tangente à $C\_{g}$ au point d’abscisse $0$ puis tracer$ C\_{g}$ dans un R.O (Figure 2 )

 **Annexe à rendre avec la copie** : Nom et prénom :

 **Figure 1**





 **Figure 2**